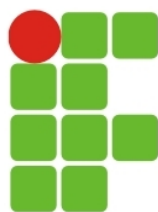


**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E  
TECNOLOGIA DO CEARÁ  
DIRETORIA DE ENSINO  
GERÊNCIA DAS LICENCIATURAS  
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

**O TEOREMA DE EQUIDISTRIBUIÇÃO DE WEYL**

FRANCISCO AULISIO DOS SANTOS PAIVA

Fortaleza  
2013



**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E  
TECNOLOGIA DO CEARÁ  
DIRETORIA DE ENSINO  
GERÊNCIA DAS LICENCIATURAS  
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

**O TEOREMA DE EQUIDISTRIBUIÇÃO DE WEYL**

**FRANCISCO AULISIO DOS SANTOS PAIVA**

Orientador: Prof. Dr. Angelo Papa Neto

Monografia apresentada ao curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal do Ceará como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Fortaleza  
2013

Dedico este trabalho a minha  
família.

## AGRADECIMENTOS

A Deus, pelo dom da vida, por sempre me guiar e pela esperança que coloca em meu coração quando forças me faltam.

Aos meus pais, Audenisio e Liduina, por toda ajuda e sacrifícios que fizeram por mim. E pelo amor que recorda que não estou sozinho em minha caminhada.

Ao professor Dr. Angelo Papa Neto, por sua preciosa orientação, dedicação, calma e grande sabedoria. Seus ensinamentos e sugestões foram imprescindíveis para a realização deste trabalho.

Aos professores: Aluisio Cabral, José Breves, Luiza Pontello, José Stálio e Gêvane Cunha, pelo apoio e por sempre acreditarem em mim.

Aos meus amigos: Moema Costa, Aline Campos, Ivana Barroso, Mafalda Balbino e Rafael Castro, pelos momentos alegres e apoio nos momentos difíceis que passamos nesses quatro anos de graduação.

“O Senhor é o meu Pastor e  
nada me faltará! (Sl 23.1)”

# Sumário

<b>1</b>	<b>Origem das Séries de Fourier</b>	<b>9</b>
1.1	Introdução . . . . .	9
1.2	Problema da corda vibrante . . . . .	9
1.2.1	Oscilador harmônico simples . . . . .	10
1.3	Equação da onda . . . . .	13
1.3.1	Obtendo a equação da onda . . . . .	13
1.3.2	Solução da equação da onda . . . . .	17
1.4	Harmônicos e superposição de tons . . . . .	18
<b>2</b>	<b>Séries de Fourier</b>	<b>20</b>
2.1	Introdução . . . . .	20
2.1.1	Funções periódicas . . . . .	20
2.1.2	Convergência uniforme . . . . .	22
2.2	Propriedades das séries de Fourier . . . . .	23
2.2.1	Coefficientes de Fourier . . . . .	23
2.2.2	Forma complexa da série de Fourier . . . . .	24
2.3	Convolução . . . . .	25
2.4	Núcleos bons . . . . .	28
2.5	Médias de Cesàro . . . . .	35
<b>3</b>	<b>Teorema de Fejér</b>	<b>37</b>
3.1	Núcleo de Fejér . . . . .	37
3.1.1	Teorema de Fejér . . . . .	40

---

<b>4</b>	<b>Teorema de Equidistribuição de Weyl</b>	<b>42</b>
4.1	Introdução . . . . .	42
4.1.1	Conceitos importantes . . . . .	42
4.2	Teorema de Equidistribuição de Weyl . . . . .	44

# Introdução

O teorema de equidistribuição foi demonstrado pelo matemático alemão Hermann Klaus Hugo Weyl que nasceu na cidade de Elmshorn em 9 de novembro de 1885 e faleceu em Zurique no dia 8 de dezembro de 1955. Ele provou que sendo  $\gamma$  um número irracional, então a sequência  $\langle \gamma \rangle, \langle 2\gamma \rangle, \langle 3\gamma \rangle, \dots$  das partes fracionárias é equidistribuída em  $[0, 1)$ . Isto quer dizer que  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\#\{1 \leq n \leq N : \langle n\gamma \rangle \in (a, b)\}}{N} = b - a$ , onde  $(a, b) \subset [0, 1)$ . Em outras palavras, para  $N$  suficientemente grande a proporção de termos de  $\langle n\gamma \rangle \in (a, b)$  com  $n \leq N$  é igual ao comprimento do intervalo  $(a, b)$ .

No presente trabalho, estudaremos tópicos de análise harmônica, mais especificamente as séries de Fourier e alguns fatos provenientes dessa teoria. E nosso principal objetivo é demonstrar o Teorema de Equidistribuição de Weyl. A seguir descreveremos sucintamente cada capítulo dessa monografia.

O capítulo 1 é uma motivação para nosso estudo, pois trata-se do problema da corda vibrante, em que obteremos a equação da onda e sua solução, assim é possível perceber a importância das séries de Fourier.

No capítulo 2 definiremos as séries de Fourier e discutiremos alguns de seus principais resultados. Destacaremos os conceitos de convolução, núcleos bons e médias de Cesàro, que são ideias fundamentais para desenvolvimento do capítulo seguinte.

Assim, o capítulo 3 aborda o importante teorema de Fejér que terá como consequência o seguinte fato: Uma função contínua  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  pode ser uniformemente aproximada por polinômios trigonométricos. Esse fato é essencial para a demonstração do principal teorema deste trabalho.

Por fim, o Teorema de Equidistribuição de Weyl é demonstrado no último capítulo.



# Origem das Séries de Fourier

## 1.1 Introdução

Jean Baptiste Joseph Fourier foi um matemático e físico, nasceu na França, na cidade de Auxerre em 21 de março de 1768 e faleceu em 16 de maio de 1830 em Paris. Foi o precursor no estudo sobre a representação de funções periódicas em séries trigonométricas convergentes, chamadas em sua homenagem de séries de Fourier.

O desenvolvimento das séries de Fourier iniciou-se com o problema da corda vibrante e a investigação da condução do calor numa barra. As leis que regem esses fenômenos físicos distintos foram expressas por duas equações diferenciais parciais: a equação da onda e a equação do calor, e essas foram resolvidas em termos de séries de Fourier.

Neste capítulo estudaremos o problema da corda vibrante, onde obteremos a equação da onda que é uma equação diferencial que descreve o movimento da corda. Assim, constitui-se uma motivação adequada para este trabalho, visto que para solucionar a equação usaremos conhecimentos de Cálculo Diferencial e Integral e Equações Diferenciais, e concluiremos que são insuficientes e para obtermos uma resolução completa do problema precisaremos das séries de Fourier.

## 1.2 Problema da corda vibrante

O problema consiste no estudo do movimento de uma corda fixada nos seus pontos de extremidade, permitida vibrar livremente. Por exemplo: as cordas de um instrumento musical. Utilizaremos o movimento harmônico simples como uma ferramenta para estudar o problema da corda vibrante.

### 1.2.1 Oscilador harmônico simples

O movimento harmônico simples (MHS) descreve o comportamento do mais básico sistema oscilatório (chamado oscilador harmônico simples), e é portanto um exemplo natural para iniciar o estudo das vibrações.

Consideremos um corpo de massa  $m$  ligada a uma mola horizontal, que por sua vez está ligada a uma parede fixa. Assumamos que o sistema encontra-se sobre uma superfície sem atrito.

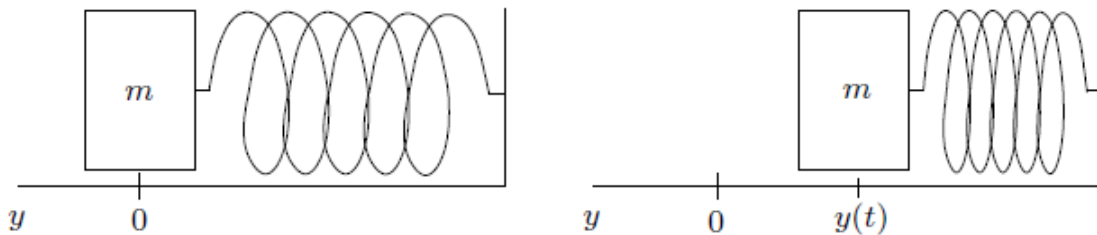


Figura 1.1: Oscilador harmônico simples

Escolhemos um eixo cuja a origem coincide com o centro de massa quando se encontra em repouso (isto é, a mola não é nem esticada, nem comprimida) como mostra a figura 1.1. Quando a massa é deslocada a partir da sua posição inicial de equilíbrio e depois libertada, ela descreverá um movimento harmônico simples. Este movimento pode ser descrito matematicamente se encontrarmos a equação diferencial cuja solução determina a posição da massa (do corpo) em um dado instante.

Seja  $y(t)$  o deslocamento da massa no tempo  $t$ . Assumamos que a mola seja ideal, isto é, satisfaz a Lei de Hooke: a força deformadora  $\vec{F}$  exercida pela mola sobre a massa é dada por:

$$\vec{F} = -ky(t)$$

onde  $k > 0$  é chamada constante da mola.

Aplicando a Lei de Newton (Força = massa x aceleração), obtemos

$$-ky(t) = my''(t)$$

onde a notação  $y''(t)$  denota a segunda derivada de  $y$  em relação a  $t$  (ou seja, a aceleração do corpo).

Segue então,

$$\begin{aligned}
 my''(t) + ky(t) = 0 &\Leftrightarrow y''(t) + \frac{k}{m}y(t) = 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow y''(t) + c^2y(t) = 0,
 \end{aligned}
 \tag{1.2.1}$$

$$\text{com } c = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Sendo  $y_1(t) = \cos(ct)$  e  $y_2(t) = \sin(ct)$  soluções da equação acima.

A solução geral da equação diferencial (1.2.1) é dada pela combinação linear de  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$ , isto é:

$$y(t) = a \cos(ct) + b \sin(ct)$$

com  $a, b \in \mathbb{R}$ .

A demonstração da proposição seguinte confirma essa afirmação.

**Proposição 1.1** *Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $f \in C^2$ , isto é,  $f''(t)$  existe para todo  $t \in \mathbb{R}$  e  $f'' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua. Se  $f$  é uma solução da equação (1.2.1), então existem  $a, b \in \mathbb{R}$  tais que  $f(t) = a \cos(ct) + b \sin(ct)$ .*

**Demonstração.** Dada  $f \in C^2$  que é solução da equação. Sejam

$$g(t) = f(t) \cos(ct) - \frac{1}{c} f'(t) \sin(ct)$$

e

$$h(t) = f(t) \sin(ct) + \frac{1}{c} f'(t) \cos(ct)$$

sendo ambas deriváveis. Derivando  $g(t)$  e  $h(t)$ , temos que

$$\begin{aligned}
 g'(t) &= f'(t) \cos(ct) - cf(t) \sin(ct) - \frac{1}{c} f''(t) \sin(ct) - \frac{c}{c} f'(t) \cos(ct) = \\
 &= -\frac{1}{c} \sin(ct) (c^2 f(t) + f''(t)) = 0
 \end{aligned}$$

isso implica que  $g(t) = a$ , com  $a \in \mathbb{R}$ . E temos também que,

$$h'(t) = f'(t) \sin(ct) + cf(t) \cos(ct) + \frac{1}{c} f''(t) \cos(ct) - \frac{c}{c} f'(t) \sin(ct) =$$

$$= \frac{1}{c} \cos(ct) (c^2 f(t) + f''(t)) = 0$$

isso implica que  $h(t) = b$ , com  $b \in \mathbb{R}$ .

Segue que,

$$f(t) \cos(ct) - \frac{1}{c} f'(t) \sin(ct) = a \quad (1.2.2)$$

e

$$f(t) \sin(ct) + \frac{1}{c} f'(t) \cos(ct) = b \quad (1.2.3)$$

Multiplicando (1.2.2) por  $\cos(ct)$  e (1.2.3) por  $\sin(ct)$ , obtemos

$$f(t) \cos^2(ct) - \frac{1}{c} f'(t) \sin(ct) \cos(ct) = a \cos(ct) \quad (1.2.4)$$

$$f(t) \sin^2(ct) + \frac{1}{c} f'(t) \sin(ct) \cos(ct) = b \sin(ct) \quad (1.2.5)$$

Somando (1.2.4) e (1.2.5), temos

$$f(t)(\sin^2(ct) + \cos^2(ct)) = a \cos(ct) + b \sin(ct)$$

De fato, concluímos que solução geral de  $f''(t) + c^2 f(t) = 0$  é

$$f(t) = a \cos(ct) + b \sin(ct)$$

e isso termina a demonstração.  $\square$

**Proposição 1.2** *Se  $a, b \in \mathbb{R}$  então pode-se escrever  $a \cos(ct) + b \sin(ct) = A \cos(ct - \varphi)$ . Onde  $A = \sqrt{a^2 + b^2}$  e  $\varphi$  é escolhido tal que  $\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  e  $\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ .*

**Demonstração.** De fato,

$$a \cos(ct) + b \sin(ct) = \left( \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos(ct) + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin(ct) \right) \sqrt{a^2 + b^2}$$

Fazendo  $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ , e escolhendo  $\varphi$  tal que  $\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  e  $\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ , obtemos

$$a \cos(ct) + b \sin(ct) = (\cos(\varphi) \cos(ct) + \sin(\varphi) \sin(ct)) A = A \cos(ct - \varphi).$$

□

Na representação acima, temos como interpretação física que  $A = \sqrt{a^2 + b^2}$  é chamado de amplitude do movimento,  $c$  é a frequência natural,  $\varphi$  é a fase e  $\frac{2\pi}{c}$  é o período do movimento. O gráfico da função  $A \cos(ct - \varphi)$  é ilustrado abaixo, observe:

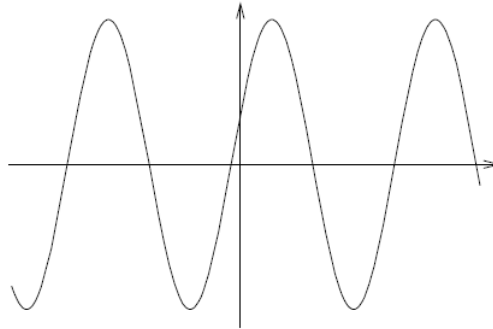


Figura 1.2: Gráfico de  $A \cos(ct - \varphi)$

Essa é a descrição matemática mais elementar de um sistema ondulatório, chamado movimento harmônico simples e envolve as mais básicas funções trigonométricas que são seno e cosseno. É importante recordar a relação entre essas funções dada pela *Fórmula de Euler*<sup>1</sup>,  $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$ .

## 1.3 Equação da onda

Agora, voltemos nossa atenção para o problema de descrever o movimento de uma corda vibrante. Portanto, obteremos a equação da onda, que é a equação diferencial que determina o movimento da corda.

### 1.3.1 Obtendo a equação da onda

Imagine uma corda colocada no plano cartesiano, e estendida ao longo do eixo  $x$ , entre  $x = 0$  e  $x = l$ . Como mostra a figura 1.3.

Supondo que ela seja colocada para vibrar, seu deslocamento  $u(x, t)$  é então uma função de  $x$  e  $t$ . O objetivo é obter uma equação diferencial que modela esse problema.

<sup>1</sup>Nome dado em homenagem ao matemático suíço *Leonhard Paul Euler* (1707-1783)

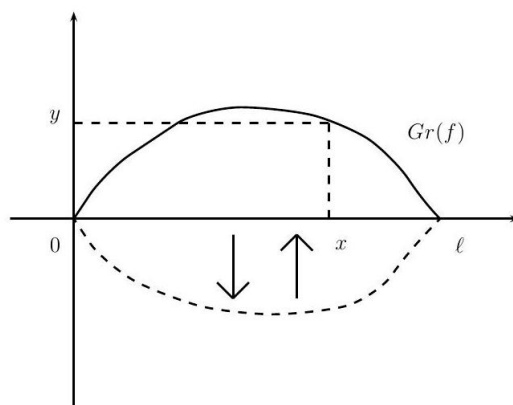


Figura 1.3: Corda estendida ao longo do eixo  $x$

Consideremos a corda como sendo subdividida em um grande número  $N$  de massas (que pensaremos como partículas individuais) distribuídas uniformemente ao longo do eixo  $x$ , tal que a  $n$ -ésima partícula tem abscissa  $x_n = \frac{nl}{N}$ . Assim, teremos a corda vibrando como um sistema de  $N$  partículas, cada uma vibrando somente na direção vertical, e tendo sua oscilação ligada a partícula vizinha pela tensão da corda. Como mostra a figura a seguir:

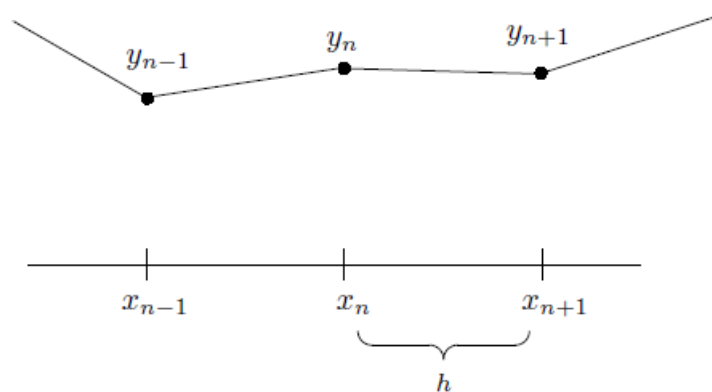


Figura 1.4: Corda vibrante como um sistema discreto de massas

Definimos  $y_n(t) = u(x_n, t)$ , e note que  $x_{n+1} - x_n = h$ , com  $h = \frac{l}{N}$ . Se assumirmos que a corda tem densidade constante,  $\rho > 0$ , é razoável atribuir a massa de cada partícula como  $\rho h$ . Portanto, pela 2ª Lei de Newton, temos  $\vec{F} = \rho h y_n''(t)$  (Força que atua sobre a partícula  $y_n$ ). Essa força é devida às duas partículas vizinhas ( $y_{n-1}$  e  $y_{n+1}$ ).

Observe a ilustração abaixo:

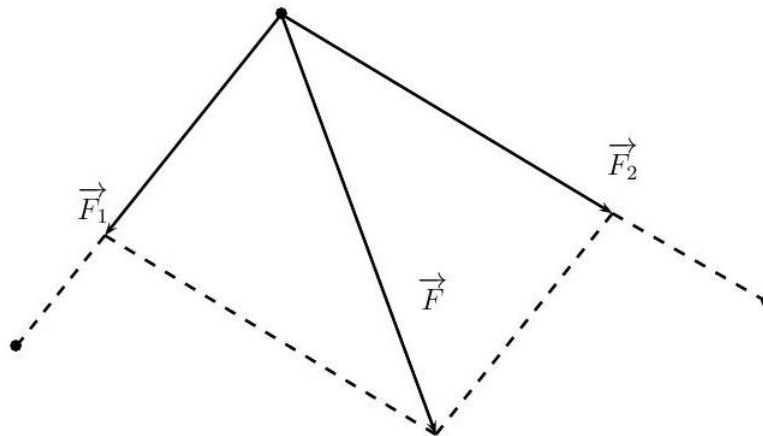


Figura 1.5: Forças que atuam sobre a partícula  $y_n$

Assumamos que  $\vec{F}_2$  (força à direita da partícula) é proporcional a

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n} = \frac{y_{n+1} - y_n}{h}$$

e a  $\vec{F}_1$  (força à esquerda da partícula) é proporcional a

$$\frac{y_{n-1} - y_n}{x_{n-1} - x_n} = \frac{y_{n-1} - y_n}{h}$$

assim, podemos escrever:

$$\vec{F}_1 = \left(\frac{\tau}{h}\right) (y_{n-1} - y_n)$$

e

$$\vec{F}_2 = \left(\frac{\tau}{h}\right) (y_{n+1} - y_n),$$

onde  $\tau > 0$  é a constante da tensão da corda. Portanto,

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \left(\frac{\tau}{h}\right) (y_{n+1} + y_{n-1} - 2y_n)$$

isto é,

$$\rho h y_n''(t) = \frac{\tau}{h} [y_{n+1}(t) + y_{n-1}(t) - 2y_n(t)] \quad (1.3.1)$$

Observe que, por um lado temos:

$$y_{n+1}(t) + y_{n-1}(t) - 2y_n(t) = u(x_n + h, t) + u(x_n - h, t) - 2u(x_n, t)$$

e por outro lado, sabemos que se  $F(x)$  tem derivada de ordem 2 contínua, então

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) + F(x-h) - 2F(x)}{h^2} = F''(x)$$

De fato, note que

$$\begin{aligned} \frac{F(x+h) + F(x-h) - 2F(x)}{h^2} &= \frac{\frac{F(x+h) - F(x)}{h} + \frac{F(x-h) - F(x)}{h}}{h} = \\ &= \frac{\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - \frac{F(x-h) - F(x)}{-h}}{h} = \frac{\frac{F(x+h) - F(x)}{h} + \frac{F(x) - F(x-h)}{h}}{h} \end{aligned}$$

Segue que,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{F(x+h) - F(x)}{h} + \frac{F(x) - F(x-h)}{h}}{h} = \frac{F'(x) - F'(x-h)}{h}$$

e

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F'(x) - F'(x-h)}{h} = F''(x)$$

Dividindo (1.3.1) por  $h$  e fazendo  $h$  tender a 0, obtemos

$$\begin{aligned} \rho y_n''(t) &= \frac{\tau}{h^2} [y_{n+1}(t) + y_{n-1}(t) - 2y_n(t)] \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \tau \frac{u(x_n + h, t) + u(x_n - h, t) - 2u(x_n, t)}{h^2} \end{aligned}$$

assim concluímos que

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \tau \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

ou

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

com  $c = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}$ .

Essa é a equação da onda (unidimensional), que pode ser escrita como

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$



### 1.3.2 Solução da equação da onda

Resolveremos a equação da onda tendo como base os conhecimentos de Cálculo Diferencial e Integral e de Equações diferenciais, mais especificamente utilizando o método de separação de variáveis e a equação que obtemos do movimento harmônico simples.

Seja  $u(x, 0) = \varphi(x)$  e  $u(x, t) = \varphi(x)\psi(t)$ .

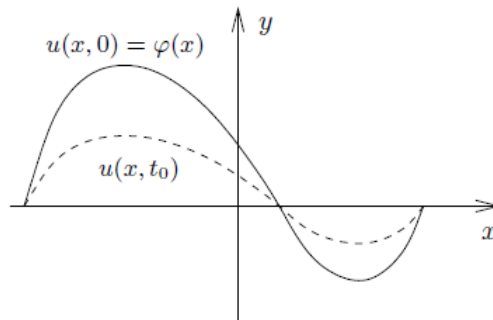


Figura 1.6: Gráfico de  $u(x, t)$

$$\begin{aligned} \text{Sabendo que } u(x, t) = \varphi(x)\psi(t) &\implies \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = \frac{\psi''(t)}{\psi(t)} \implies \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = \frac{\psi''(t)}{\psi(t)} = \lambda \implies \\ &\implies \begin{cases} \varphi''(x) - \lambda\varphi(x) = 0 \\ \psi''(t) - \lambda\psi(t) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Note que essas equações são do mesmo formato da equação que obtemos no estudo do MHS. Portanto, se  $\lambda \geq 0$ , então  $\psi(t)$  não oscila (apenas cresce) quando o tempo varia. Consideremos  $\lambda < 0$ , assim podemos escrever  $\lambda = -c^2$ , logo,

$$\varphi''(x) - \lambda\varphi(x) = 0 \implies \varphi(x) = A\cos(cx) + B\sin(cx)$$

e

$$\psi''(t) - \lambda\psi(t) = 0 \implies \psi(t) = \tilde{A}\cos(ct) + \tilde{B}\sin(ct)$$

Como  $\varphi(0) = 0$  e  $\varphi(\pi) = 0$ , temos  $A = 0$ . Assim,  $\varphi(x) = B\sin(cx)$  e  $\varphi(\pi) = 0$  implica  $B\sin(c\pi) = 0$ . Logo,  $B = 0$  ou  $\sin(c\pi) = 0$ .  $B = 0$  implica que  $\varphi(x) = 0, \forall x$ , logo  $u(x, t)$  é solução trivial. Se  $B \neq 0$ , temos  $B\sin(c\pi) = 0$ .

Se  $c \leq -1$ , podemos trocar a constante de modo a supor que  $c \geq 1$ , pois cosseno é uma função par e seno é ímpar.

Portanto, para cada  $m \in \mathbb{Z}, m \geq 1$ , temos

$$U_m(x, t) = (A_m\cos(mt) + B_m\sin(mt))\cdot\sin(mx) \quad (1.3.2)$$

é solução da equação da onda.

A solução que obtemos é apenas uma de várias, e qualquer combinação linear de soluções também será solução. Reciprocamente, toda solução da equação da onda pode ser expressa como uma combinação linear de funções desse tipo. Em geral, uma solução qualquer da equação da onda é dada por uma série de Fourier.

## 1.4 Harmônicos e superposição de tons

Uma observação física muito interessante é a existência de harmônicos, ou sobretons. Os tons puros são acompanhados por combinações de sons harmônicos que são os principais responsáveis pelo timbre do instrumento. A ideia de combinação ou sobreposição de tons é implementada matematicamente pelo conceito básico de linearidade.

Com exemplo, façamos  $m = 1$  em (1.3.2), esse caso corresponde ao tom fundamental ou primeiro harmônico. Temos  $U_1(x, t) = (A_1 \cos(t) + B_1 \sin(t)) \cdot \sin(x)$ . Fazendo  $A_1 = 1$  e  $B_1 = 0$ , de modo que  $U_1(x, 0) = \sin(x)$ , obtemos:  $U_1(x, t) = \cos(t) \sin(x)$ . A figura 1.7 ilustra seu movimento.

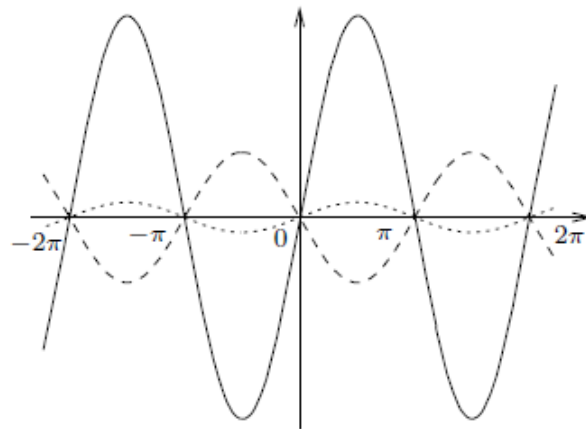


Figura 1.7: Gráfico do movimento de  $\cos(t) \sin(x)$

Fazendo  $m = 2$  em (1.3.2), obtemos o primeiro sobretom ou segundo harmônico. Temos  $U_2(x, t) = \cos(2t) \operatorname{sen}(2x)$ . Seu movimento é descrito na figura abaixo:

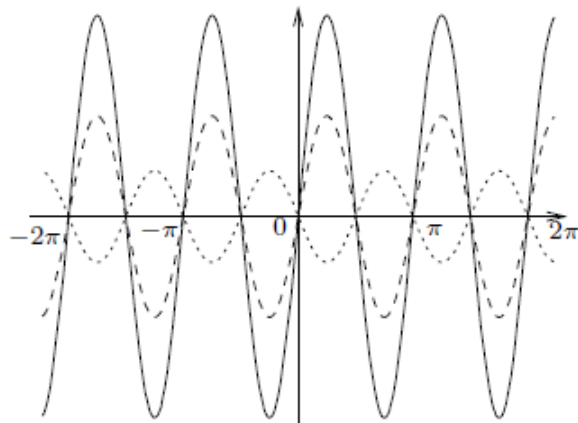


Figura 1.8: Gráfico do movimento de  $\cos(2t) \operatorname{sen}(2x)$

Para  $m \geq 2$ , obtem-se outros sobretoms ou harmônicos sendo mais altos. Quanto mais alto é um harmônico, maior é a frequência e menor é o período  $\left(\frac{2\pi}{m}\right)$ .

## Séries de Fourier

### 2.1 Introdução

Neste trabalho as séries de Fourier serão utilizadas no desenvolvimento da teoria essencial para a demonstração do teorema de equidistribuição de Weyl. Portanto, nosso objetivo neste capítulo é definir as séries de Fourier, e destacar alguns de seus principais resultados, como por exemplo, os coeficientes de Fourier e sua forma complexa. Assumiremos que tais séries convergem uniformemente, visto que o detalhamento desse conceito fugiria do nosso escopo. Estudaremos e destacaremos os conceitos de convoluções, núcleos bons e médias de Cesàro, que são ideias de grande importância para o capítulo 3.

#### 2.1.1 Funções periódicas

**Definição 2.1** *Uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é periódica de período  $T$  se  $f(x + T) = f(x)$  para todo  $x$ .*

**Exemplos.**

1. A função  $\cos(x)$  é periódica de período  $2\pi$ .
2. A função  $f(x) = x - [x]$ , onde  $[x]$  representa o maior inteiro menor do que ou igual a  $x$ , é periódica de período 1. **Observação:** Se  $T$  é um período para a função  $f$ , então  $2T$  também é um período, pois

$$f(x + 2T) = f(x + T) = f(x)$$

**Proposição 2.2** *Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua e  $2l$ -periódica, com  $l \in \mathbb{R}, l > 0$ , então*

$$\int_{x-l}^{x+l} f(y)dy = \int_{-l}^l f(y)dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

**Demonstração.**

Observe que  $x + l = x - l + 2l$ . Assim, o intervalo  $[x - l, x + l]$  tem comprimento  $2l$ . Seja  $n \in \mathbb{Z}$  tal que  $2(n - 1)l \leq x - l \leq 2nl$ , então somando  $2l$  obtemos  $2nl \leq x + l \leq 2(n + 1)l$ . Além disso,  $x - l - 2l(n - 1) = x - l - 2nl + 2l = x - 2nl + l$  e  $x + l - 2nl$  são iguais. Isto é, as distâncias de  $x - l$  e  $x + l$  aos extremos dos intervalos onde  $f$  se repete são as mesmas.

Note que,

$$(1) \quad \int_{2nl}^{x+l} f(y)dy = \int_{2(n-1)l}^{x-l} f(y)dy \quad (2.1.1)$$

De fato, fazendo  $z = y - 2l$  temos  $dz = dy$ , assim

$$\int_{2nl}^{x+l} f(y)dy = \int_{2(n-1)l}^{x-l} f(z + 2l)dz$$

Como  $f$  é  $2l$ -periódica, segue que

$$\int_{2nl}^{x+l} f(y)dy = \int_{2(n-1)l}^{x-l} f(y)dy$$

$$(2) \quad \int_{2(n-1)l}^{2nl} f(y)dy = \int_{-l}^l f(y)dy \quad (2.1.2)$$

De fato, fazendo  $z = y - (2n + 1)l$ , temos  $dz = dy$ , assim

$$\int_{2(n-1)l}^{2nl} f(y)dy = \int_{-l}^l f(z + 2(n + 1)l)dz$$

Como  $f$  é  $2l$ -periódica, segue que

$$\int_{2(n-1)l}^{2nl} f(y)dy = \int_{-l}^l f(y)dy$$

Portanto, segue de (2.1.1) e (2.1.2)

$$\begin{aligned} \int_{x-l}^{x+l} f(y)dy &= \int_{x-l}^{2nl} f(y)dy + \int_{2nl}^{x+l} f(y)dy = \\ &= \int_{x-l}^{2nl} f(y)dy + \int_{2(n-1)l}^{x-l} f(y)dy = \int_{2(n-1)l}^{2nl} f(y)dy = \\ &= \int_{-l}^l f(y)dy \end{aligned}$$

e isso termina a demonstração.  $\square$

### 2.1.2 Convergência uniforme

**Definição 2.3** Seja  $\int_{x-l}^{x+l} f(y)dy$  uma função, com  $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ . A sequência  $(f_n)_{n \geq 1} = (f_1, f_2, f_3, \dots)$  é chamada sequência de funções. Dado  $x_0 \in I$ , obtemos uma sequência numérica  $(f_n(x_0))_{n \geq 1}$ . Suponha que,  $\forall x \in I$ , a sequência numérica  $(f_n(x))_{n \geq 1}$  convirja. Então é possível definir uma função  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x),$$

$\forall x_0 \in I$ . Neste caso, dizemos que  $f_n$  converge simplesmente (ou ponto-a-ponto) para  $f$  em  $I$ .

**Definição 2.4** Dada uma sequência de funções  $(f_n)_{n \geq 1}$  e  $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ,  $\forall n \geq 1$ . Se  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  é tal que, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $N \geq 1$  com

$$n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

$\forall x \in I$ . Dizemos que  $f_n$  converge uniformemente para  $f$  em  $I$ .

**Propriedades.** Sejam  $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  e  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Se  $f_n \rightarrow f$  uniformemente, então:

1.  $f_n$  contínua,  $\forall n \geq 1 \Rightarrow f$  é contínua.

2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n dx = \int_a^b f(x) dx$

## 2.2 Propriedades das séries de Fourier

**Definição 2.5** *Seja  $f$  uma função periódica de período  $2\pi$  e integrável sobre o intervalo  $[-\pi, \pi]$  e  $n \in \mathbb{N}$ . A série de Fourier de  $f$  é a série trigonométrica*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)]$$

### 2.2.1 Coeficientes de Fourier

Se uma função  $f(x)$  for expressa como série de Fourier, isto é,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)] \quad (2.2.1)$$

é importante determinar  $a_0$ ,  $a_n$  e  $b_n$  que são chamados **coeficientes de Fourier**.

Suponhamos que (2.2.1) converge uniformemente, então  $f$  é contínua (logo, é integrável) e periódica de período  $2\pi$ , pois é período fundamental de  $\cos(nx)$  e é período de todas as outras funções que aparecem na série.

- Determinando  $a_0$ :

Como a convergência é uniforme, podemos integrar (2.2.1), temos então:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(nx) dx \right] \Rightarrow \\ &\Rightarrow a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \end{aligned}$$

Para determinarmos os demais coeficientes, exploramos a mesma ideia e usamos as relações de ortogonalidade:

1.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \operatorname{sen}(mx) dx = 0, \text{ se } n, m \geq 1$$

2.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx = \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq m, n, m \geq 1 \\ \pi, & \text{se } n = m \geq 1 \end{cases}$$

3.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(nx) \operatorname{sen}(mx) dx = \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq m, n, m \geq 1 \\ \pi, & \text{se } n = m \geq 1 \end{cases}$$

- Se multiplicarmos (2.2.1) por  $\cos(mx)$ , e integrarmos, obtemos:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx) dx = a_m \pi$$

- De forma análoga, se multiplicarmos (2.2.1) por  $\operatorname{sen}(mx)$ , e integrarmos, obtemos:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(mx) dx = b_m \pi$$

Portanto,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad n \geq 0$$

e

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx) dx, \quad n \geq 1$$

### 2.2.2 Forma complexa da série de Fourier

A forma complexa da série de Fourier de uma função periódica  $f$  pode ser obtida a partir da fórmula de Euler que vimos na seção 1.2.

Sejam

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta \tag{2.2.2}$$

e

$$e^{-i\theta} = \cos \theta - i \operatorname{sen} \theta \tag{2.2.3}$$

Somando (2.2.2) e (2.2.3), tem-se

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \tag{2.2.4}$$

e subtraindo (2.2.2) e (2.2.3), tem-se

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \tag{2.2.5}$$

Assim,



$$\begin{aligned} a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx) &= \frac{a_n}{2} (e^{inx} + e^{-inx}) + \frac{b_n}{2i} (e^{inx} - e^{-inx}) = \\ &= \left( \frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i} \right) e^{inx} + \left( \frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i} \right) e^{-inx} \end{aligned}$$

Fazendo  $c_n = \left( \frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i} \right)$ , obtemos que:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2} (a_n - ib_n) = \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx - i \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx) dx \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) (\cos(nx) - i \operatorname{sen}(nx)) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \end{aligned}$$

Temos também que,

$$c_0 := \frac{a}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

Logo,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \quad (2.2.6)$$

com

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx, \quad \text{onde } n \in \mathbb{Z}$$

E (2.2.6) é a forma complexa da série de Fourier.

## 2.3 Convolução

**Definição 2.6** Dadas duas funções  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , periódicas, de período  $2\pi$  e integráveis, a convolução de  $f$  e  $g$  é a função  $f * g : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por:

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x-y)dy \quad (2.3.1)$$

Como  $f$  e  $g$  são integráveis,  $f(y)g(x-y)$  é integrável e a expressão em (2.3.1) faz sentido. Além disso, é possível fazer uma mudança de variável em (1) de modo a se obter

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)g(y)dy \quad (2.3.2)$$

**Observações:**

(1) Convoluções são “médias ponderadas”. Por exemplo: se  $g = 1$ , em (2.3.1), então

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) dy,$$

pode ser interpretado como o valor médio de  $f$  sobre o círculo.

(2) A convolução  $f * g$  desempenha um papel semelhante, e de certa forma substitui o produto  $f(x)g(x)$ .

**Definição 2.7** Um polinômio trigonométrico é uma soma dada por

$$P(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{\frac{2\pi i n x}{\ell}} \quad (2.3.3)$$

Onde  $C_n \in \mathbb{C}$  e  $C_n = 0$  para  $n \gg 0$  (lê-se:  $n$  suficientemente grande), isto é, uma série trigonométrica que envolve um número finito de termos não-nulos.

Todo polinômio trigonométrico é combinação linear de um número finito de funções pertencentes ao conjunto  $\{1, e^{2\pi i x}, e^{4\pi i x}, \dots, e^{2\pi i n x}, \dots\}$

A importância da convolução em nosso contexto é a consequência do seguinte fato:

Se  $S_N(f)(x) = \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e^{inx}$ , é a soma parcial da série de Fourier de  $f$ , ou seja, é um polinômio trigonométrico de grau  $N$  de  $f$ , onde  $\hat{f}(n)$  é o  $n$ -ésimo coeficiente de Fourier de  $f$ , ou seja,  $\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iny} dy$ , então:

$$\begin{aligned} S_N(f)(x) &= \sum_{n=-N}^N \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iny} dy \right) e^{inx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left( \sum_{n=-N}^N e^{in(x-y)} \right) dy = \\ &= (f * D_N)(x). \end{aligned}$$

Onde  $D_N$  é chamado de **N-ésimo Núcleo de Dirichlet**<sup>1</sup> dado por:

$$D_N(x) = \sum_{n=-N}^N e^{inx}$$

Assim, entender o comportamento de  $S_N(f)$  é equivalente a entender o comportamento de  $f * D_N$ .

Veamos algumas propriedades:

<sup>1</sup>Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet foi um matemático alemão nasceu na cidade de Düren em 13 de fevereiro de 1805 e faleceu em Göttingen no dia 5 de maio de 1859.

**Proposição 2.8** *Suponha que  $f$ ,  $g$  e  $h$  são funções periódicas integráveis de período  $2\pi$ . Então:*

$$(i) \quad f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$$

$$(ii) \quad (cf) * g = c(f * g) = f * (cg), \quad \forall c \in \mathbb{C}$$

$$(iii) \quad f * g = g * f$$

$$(iv) \quad (f * g) * h = f * (g * h)$$

$$(v) \quad \widehat{f * g}(n) = \hat{f}(n)\hat{g}(n)$$

**Demonstração.**

(i)

$$\begin{aligned} (f * (g + h))(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) [g(x - y) + h(x - y)] dy = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x - y)dy + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)h(x - y)dy = (f * g)(x) + (f * h)(x) \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} ((cf) * g)(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} cf(y)g(x - y)dy = c \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x - y)dy = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)(cg(x - y))dy = c(f * g) = f * (cg) \end{aligned}$$

**Observação:** Nos itens (iii) e (iv) será utilizado o fato de que qualquer intervalo de integração abaixo pode ser substituído por outro intervalo de mesmo comprimento, isso foi demonstrado na proposição (2.2).

(iii)

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x - y)dy$$

Fazendo  $y_1 = x - y$ , temos  $y = x - y_1$ , assim  $dy = -dy_1$ , segue

$$\begin{aligned} (f * g)(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{x+\pi}^{x-\pi} f(x - y_1)g(y_1)(-dy_1) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(x - y_1)g(y_1)(dy_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x - y_1)g(y_1)(dy_1) = (g * f)(x) \end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned} (f * (g * h))(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)(g * h)(x - y)dy = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(z)h(x - y - z)dz \right] dy \end{aligned}$$

Fazendo  $w = y + z$ , temos  $z = w - y$ , assim  $dw = dz$ , segue

$$\begin{aligned} (f * (g * h))(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(w - y)h(x - w)dw \right] dy = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(w - y)dy \right] h(x - w)dw = ((f * g) * h) \end{aligned}$$

(v)

$$\begin{aligned} \widehat{f * g}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f * g)(x)e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x - y)dy \right) e^{-inx}dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)e^{-iny} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x - y)e^{-in(x - y)}dx \right) dy = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)e^{-iny} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x)e^{-inx}dx \right) dy = \hat{f}(n)\hat{g}(n) \end{aligned}$$

□

**Observação:** Se  $f$  e  $g$  são contínuas então  $f * g$  é contínua.

## 2.4 Núcleos bons

**Definição 2.9** Seja  $\{K_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  uma família de núcleos, onde  $K_n : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}, \forall n \geq 1$ , é chamada família de núcleos bons se satisfaz as seguintes propriedades:

(a) Para todo  $n \geq 1$ ,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(x)dx = 1,$$

(b) Existe  $M > 0$  tal que, para todo  $n \geq 1$ ,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |K_n(x)|dx \leq M$$

(c) Para todo  $\delta > 0$ , tem-se

$$\int_{\delta \leq |x| \leq \pi} |K_n(x)| dx \rightarrow 0,$$

se  $n \rightarrow \infty$ .

**Observações:**

- (1) Se  $K_n(x) > 0$ ,  $\forall n \geq 1$ , e  $\forall x \in [-\pi, \pi]$ , então (b) será consequência de (a).
- (2) Os itens (a) e (c) podem ser interpretados da seguinte forma: cada núcleo  $K_n$  é uma distribuição de massa ao longo do intervalo  $[-\pi, \pi]$  de modo que o total de massa distribuída seja igual a 1 e, à medida que  $n$  cresce a massa fica concentrada em torno da origem.

Observe:

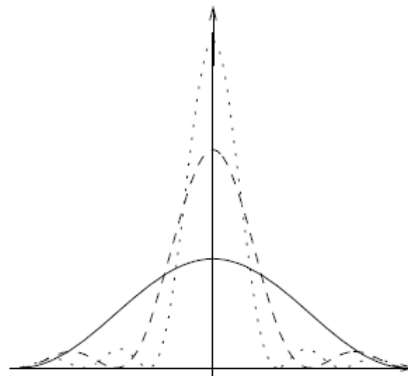


Figura 2.1: Concentração de massa em torno da origem

**Teorema 2.10** *Seja  $\{K_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  uma família de núcleos bons e seja  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  periódica e integrável. Então*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f * K_n)(x) = f(x) \tag{2.4.1}$$

*sempre que  $f$  é contínua em  $x$ . Se  $f$  é contínua em  $[-\pi, \pi]$ , então o limite (2.4.1) é uniforme, isto é, não depende de  $x$ .*

**Demonstração.**

$f$  contínua em  $x$  implica que  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ , tal que, se  $|y| < \delta$  então  $|f(x - y) - f(x)| < \varepsilon$ . Assim, temos:

$$(f * K_n)(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(y) f(x - y) dy - f(x)$$

Pelo item (a) da definição (2.9), segue que

$$\begin{aligned} (f * K_n)(x) - f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(y) f(x - y) dy - f(x) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(y) dy = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(y) [f(x - y) - f(x)] dy \end{aligned}$$

Assim, pela desigualdade triangular

$$\begin{aligned} |(f * K_n)(x) - f(x)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(y) [f(x - y) - f(x)] dy \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|y| < \delta} |K_n(y)| |f(x - y) - f(x)| dy + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |y| \leq \pi} |K_n(y)| |f(x - y) - f(x)| dy \end{aligned}$$

Note que  $|f(x - y) - f(x)| < \varepsilon$  e ainda,  $|f(x - y) - f(x)| \leq |f(x - y)| + |f(x)| \leq B + B = 2B$ , pois  $f$  é contínua sobre  $[-\pi, \pi]$ .

Segue,

$$|(f * K_n)(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{|y| < \delta} |K_n(y)| dy + \frac{2B}{2\pi} \int_{\delta \leq |y| \leq \pi} |K_n(y)| dy$$

Pelo item (b) da definição (2.9), temos

$$|(f * K_n)(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2\pi} M + \frac{B}{\pi} \int_{\delta \leq |y| \leq \pi} |K_n(y)| dy$$

Como

$$\int_{\delta \leq |y| \leq \pi} |K_n(y)| dy \leq \varepsilon,$$

se  $n$  for suficientemente grande.

Assim,

$$|(f * K_n)(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon M}{2\pi} + \frac{B}{\pi} \int_{\delta \leq |y| \leq \pi} |K_n(y)| dy \leq \left( \frac{M}{2\pi} + \frac{B}{\pi} \right) \varepsilon$$

Fazendo  $c := \left( \frac{M}{2\pi} + \frac{B}{\pi} \right)$ , finalmente,

$$|(f * K_n)(x) - f(x)| \leq C\varepsilon,$$

para  $n$  suficientemente grande.

Como  $\varepsilon > 0$ , temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f * K_n)(x) = f(x).$$

Se  $f$  é contínua em  $[-\pi, \pi]$ , então  $\delta > 0$  pode ser escolhido independentemente de  $x$ . Logo, o limite é uniforme (isto é, não depende de  $x$ ).

□

**Observação:** Vimos que  $S_N(f)(x) = (f * D_N)(x)$ , onde  $D_N$  é o **Núcleo de Dirichlet** dado por:

$$D_N(x) = \sum_{n=-N}^N e^{inx}.$$

Assim, é natural perguntarmos se  $D_N$  é um núcleo bom. O seguinte lema nos garantirá que o Núcleo de Dirichlet não é um núcleo bom.

**Lema 2.11** *O Núcleo de Dirichlet pode ser expresso como*

$$D_N(x) = \frac{\operatorname{sen} \left( N + \frac{1}{2} \right) x}{\operatorname{sen} \left( \frac{x}{2} \right)}$$

e não é um núcleo bom.

**Demonstração:**

- Como  $D_N(x) = \sum_{n=-N}^N e^{inx}$ , seja  $\omega := e^{ix}$ . Então,

$$D_N(x) = \sum_{n=-N}^N \omega^n = \omega^{-N} + \omega^{-N+1} + \dots + \omega^N = \omega^{-N}(1 + \omega + \dots + \omega^{2N})$$

Note que os termos entre parênteses formam a soma dos termos de uma P.G, assim

$$D_N(x) = \omega^{-N} \left( \frac{\omega^{2N+1} - 1}{\omega - 1} \right) = \frac{\omega^{N+1} - \omega^{-N}}{\omega - 1} = \frac{\omega^{-\frac{1}{2}}(\omega^{N+1} - \omega^{-N})}{\omega^{-\frac{1}{2}}(\omega - 1)} =$$

$$= \frac{\omega^{N+\frac{1}{2}} - \omega^{-N-\frac{1}{2}}}{\omega^{\frac{1}{2}} - \omega^{-\frac{1}{2}}} = \frac{\omega^{N+\frac{1}{2}} - \omega^{-N-\frac{1}{2}}}{\frac{2i}{\omega^{\frac{1}{2}} - \omega^{-\frac{1}{2}}}}$$

Sabemos por (2.2.5) que  $\text{sen } \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$ , assim;

$$D_N(x) = \frac{\text{sen} \left( N + \frac{1}{2} \right) x}{\text{sen} \left( \frac{x}{2} \right)} \quad (2.4.2)$$

- Mostremos agora que  $D_N(x)$  não é um núcleo bom. Suponhamos  $D_N(x)$  seja um núcleo bom, isto é, deverá satisfazer as três propriedades da definição 2.9.

(1) Temos que

$$D_N(x) = \sum_{n=-N}^N e^{inx} = e^{-iNx} + \dots + e^{-ix} + 1 + e^{ix} + \dots + e^{iNx} = 1 + \sum_{n=1}^N (e^{inx} + e^{-inx})$$

Por (2.2.4), segue que

$$D_N(x) = 1 + \sum_{n=1}^N 2\cos(nx) \quad (2.4.3)$$

Aplicando a integral em (2.4.3), obtemos

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(x) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^N 2\cos(nx) dx = 2\pi + 2 \sum_{n=1}^N \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) dx = \\ &= 2\pi + \left[ 2 \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \text{sen}(nx) \right]_{x=-\pi}^{x=\pi} = 2\pi + 0, \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(x) dx = 1, \quad (2.4.4)$$

isto é, satisfaz a propriedade (a) da definição 2.9.



(2) Sabemos pelo teorema do valor médio que  $\frac{\text{sen}(t)}{t} = \frac{\text{sen}(t) - 0}{t - 0} = \cos \beta$ , onde  $0 < \beta < t$ . Logo,

$$\left| \frac{\text{sen}(t)}{t} \right| = |\cos \beta| \leq 1 \Rightarrow |\text{sen}(t)| \leq |t|, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.4.5)$$

Portanto, por (2.4.5) e (2.4.2), temos

$$|D_N(x)| = \frac{\left| \text{sen} \left( N + \frac{1}{2} \right) x \right|}{\left| \text{sen} \left( \frac{x}{2} \right) \right|} \geq \frac{\left| \text{sen} \left( N + \frac{1}{2} \right) x \right|}{\left| \left( \frac{x}{2} \right) \right|}$$

Aplicando a integral, obtemos

$$\int_{-\pi}^{\pi} |D_N(x)| dx \geq \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\left| \text{sen} \left( N + \frac{1}{2} \right) x \right|}{\left| \left( \frac{x}{2} \right) \right|} dx = 2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\left| \text{sen} \left( N + \frac{1}{2} \right) x \right|}{|x|} dx \quad (2.4.6)$$

De (2.4.6) calculemos  $2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\left| \text{sen} \left( N + \frac{1}{2} \right) x \right|}{|x|} dx$

Fazendo uma mudança de variável na integral:

$$y = \left( N + \frac{1}{2} \right) x \Rightarrow dy = \left( N + \frac{1}{2} \right) dx \Rightarrow dx = \left( \frac{2}{2N + 1} \right) dy. \text{ Daí,}$$

$$\begin{aligned} 2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\left| \text{sen} \left( N + \frac{1}{2} \right) x \right|}{|x|} dx &= 2 \int_{-\pi \frac{2N+1}{2}}^{\pi \frac{2N+1}{2}} \frac{|\text{sen } y|}{|y|} \frac{2}{2N+1} dy = 2 \int_{-\pi \frac{2N+1}{2}}^{\pi \frac{2N+1}{2}} \frac{|\text{sen } y|}{|y|} dy \\ &= 2 \left[ \int_{-\pi \frac{2N+1}{2}}^{\pi} \frac{|\text{sen } y|}{|y|} dy + \int_{\pi}^{N\pi} \frac{|\text{sen } y|}{|y|} dy + \int_{N\pi}^{\pi \frac{2N+1}{2}} \frac{|\text{sen } y|}{|y|} dy \right] \end{aligned}$$

Façamos  $k_1 = \int_{-\pi \frac{2N+1}{2}}^{\pi} \frac{|\text{sen } y|}{|y|} dy$ ,  $k_2 = \int_{N\pi}^{\pi \frac{2N+1}{2}} \frac{|\text{sen } y|}{|y|} dy$ , e  $k = k_1 + k_2$ , pois seus resultados não influenciarão em nossa conclusão. Agora, observe que:

$$2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\left| \text{sen} \left( N + \frac{1}{2} \right) x \right|}{|x|} dx = 2 \left[ k + \int_{\pi}^{N\pi} \frac{|\text{sen } y|}{|y|} dy \right] \quad (2.4.7)$$

Note,

$$\int_{\pi}^{N\pi} \frac{|\operatorname{sen} y|}{|y|} dy = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{|\operatorname{sen} y|}{|y|} dy + \int_{2\pi}^{3\pi} \frac{|\operatorname{sen} y|}{|y|} dy + \dots + \int_{(N-1)\pi}^{N\pi} \frac{|\operatorname{sen} y|}{|y|} dy$$

E observe ainda que

$$\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{|\operatorname{sen} y|}{|y|} dy \geq \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{|\operatorname{sen} y|}{n\pi} dy = \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{1}{n\pi} |\operatorname{sen} y| dy,$$

pois,  $(n-1)\pi \leq y \leq n\pi$ .

Como  $|\operatorname{sen} y|$  é periódica então  $[(n-1)\pi, n\pi]$  e  $[0, \pi]$  tem o mesmo comprimento, assim,

$$\begin{aligned} \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{|\operatorname{sen} y|}{|y|} dy &\geq \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{|\operatorname{sen} y|}{n\pi} dy = \int_0^{\pi} \frac{1}{n\pi} |\operatorname{sen} y| dy = \\ \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{|\operatorname{sen} y|}{n\pi} dy &= \int_0^{\pi} \frac{1}{n\pi} \operatorname{sen} y dy = \left[ -\frac{1}{n\pi} \operatorname{cos} y \right]_{y=0}^{y=\pi} = \frac{2}{n\pi}. \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

Portanto, aplicando (2.4.7) e (2.4.8) em (2.4.6), obtemos

$$\int_{-\pi}^{\pi} |D_N(x)| dx \geq 2 \left[ k + \sum_{n=2}^N \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{|\operatorname{sen} y|}{|y|} dy \right] = 2k + \frac{4}{\pi} \sum_{n=2}^N \frac{1}{n}$$

Assim,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |D_N(x)| dx \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 2k + \frac{4}{\pi} \sum_{n=2}^N \frac{1}{n} \right) = 2k + \frac{4}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Mas  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$  é divergente (série harmônica).

Concluimos que,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |D_N(x)| dx = \infty$$

isto é, não satisfaz a propriedade (b) da definição 2.9. Assim, o Núcleo de Dirichlet não é um núcleo bom.  $\square$

## 2.5 Médias de Cesàro

Seja  $\sum_{n=0}^{\infty} C_n$  uma série numérica, com  $C_n \in \mathbb{C}$ ,  $\forall n \geq 0$ . A  $n$ -ésima soma parcial é a soma  $s_n := \sum_{k=0}^n C_k$ . Dizemos que a série converge se  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ . O número  $s \in \mathbb{C}$  é chamado **limite da série** ou **soma da série**. Quando  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$  não existe, podemos usar uma noção mais abrangente de convergência. Por exemplo:

Consideremos a série

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k,$$

suas somas parciais formam a sequência  $\{1, 0, 1, 0, 1, \dots\}$ . Esta sequência não converge, logo a série  $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$  diverge (no sentido usual). Podemos, no entanto, considerar as **médias**  $\sigma$  das somas parciais, da seguinte forma:

$$\sigma_1 = \frac{s_0}{1} = 1, \quad \sigma_2 = \frac{s_0 + s_1}{2} = \frac{1}{2}, \quad \sigma_3 = \frac{s_0 + s_1 + s_2}{3} = \frac{2}{3},$$

$$\sigma_4 = \frac{s_0 + s_1 + s_2 + s_3}{4} = \frac{1}{2}, \quad \sigma_5 = \frac{s_0 + s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + s_5}{5} = \frac{3}{5}.$$

Temos que,

$$\{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{1}{2}, \dots \right\} \text{ e } \sigma_n = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{se } n \equiv 0 \pmod{2} \\ \frac{n+1}{2n}, & \text{se } n \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$$

Note que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \frac{1}{2}$ . Portanto, dizemos que  $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$ , **converge à Cesàro** para  $\frac{1}{2}$ .

Em geral, se  $(S_n)_{n=0}^{\infty}$  é uma sequência, podemos considerar  $\{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty}$ , onde

$$\sigma_n = \frac{S_0 + S_1 + \dots + S_{n-1}}{n},$$

e é chamada sequência das médias de Cesàro<sup>2</sup>. Se a sequência  $\{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty}$  converge, dizemos que  $(S_n)_{n=0}^{\infty}$  **converge à Cesàro**.

<sup>2</sup>Ernesto Cesàro foi um matemático italiano (1859-1906).

**Proposição 2.12** *Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ , então  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = s$*

**Demonstração.**

$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ , significa que, dado  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists N \geq 1$ , tal que  $n \geq N \Rightarrow |s_n - s| < \varepsilon$ . Queremos mostrar que para  $n$  suficientemente grande, tem-se que  $|\sigma_n - s| \rightarrow 0$ . Para  $n \geq N$ , segue que:

$$\begin{aligned} \sigma_n - s &= \frac{s_0 + s_1 + \dots + s_{n-1}}{n} - s = \frac{s_0 + s_1 + \dots + s_{N-1}}{n} + \frac{s_N + \dots + s_{n-1}}{n} - s = \\ &= \frac{s_0 + s_1 + \dots + s_{N-1}}{N} \cdot \frac{N}{n} + \frac{s_N + \dots + s_{n-1}}{n} - s = \\ &= \frac{s_0 + s_1 + \dots + s_{N-1}}{N} \cdot \frac{N}{n} + \frac{s_N + \dots + s_{n-1} - ns}{n} = \\ &= \sigma_n \cdot \frac{N}{n} + \frac{(s_N - s) + \dots + (s_{n-1} - s) - Ns}{n} = \sigma_n \cdot \frac{N}{n} - s \cdot \frac{N}{n} + \frac{(s_N - s) + \dots + (s_{n-1} - s)}{n} \end{aligned}$$

Assim,

$$|\sigma_n - s| \leq |\sigma_n| \cdot \frac{N}{n} + |s| \cdot \frac{N}{n} + \frac{|(s_N - s)| + \dots + |(s_{n-1} - s)|}{n}$$

Como  $n \geq N \Rightarrow |s_n - s| < \varepsilon$ . E o último membro do lado direito tem  $n - N$  termos, então

$$|\sigma_n - s| \leq |\sigma_n| \cdot \frac{N}{n} + |s| \cdot \frac{N}{n} + \frac{n - N}{n} \cdot \varepsilon = |\sigma_n| \cdot \frac{N}{n} + \varepsilon - \frac{N}{n} \cdot \varepsilon$$

Portanto,  $|\sigma_n| \cdot \frac{N}{n} \rightarrow 0$  e  $\frac{N}{n} \cdot \varepsilon \rightarrow 0$ , quando  $n \rightarrow \infty$ . Logo,  $|\sigma_n - s| \rightarrow 0$ .  
Como queríamos demonstrar. □

## Teorema de Fejér

Neste capítulo definiremos os núcleos de Fejér<sup>1</sup>, e provaremos que formam uma família de núcleos bons. Demonstraremos o importante teorema de Fejér que fornecerá o seguinte corolário: Uma função contínua  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  pode ser uniformemente aproximada por polinômios trigonométricos. Essa consequência é essencial para a demonstração do teorema de equidistribuição de Weyl.

### 3.1 Núcleo de Fejér

**Definição 3.1** Seja  $D_n(x) = \sum_{k=-n}^n e^{ikx}$  o núcleo de Dirichlet e

$$S_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} = (f * D_n)(x)$$

um polinômio trigonométrico de grau  $n$ , onde  $c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iky} dy$ . Seja

$$\sigma_N = \frac{S_0(f)(x) + \dots + S_{N-1}f(x)}{N},$$

a  $N$ -ésima média de Cesàro da série de Fourier, temos

$$\sigma_N f(x) = \frac{(f * D_0)(x) + \dots + (f * D_{N-1})(x)}{N} = (f * F_N)(x)$$

pela linearidade da convolução. E

$$F_N(x) = \frac{D_0(x) + \dots + D_{N-1}(x)}{N},$$

que é a média de Cesàro do núcleo de Dirichlet, é **chamado de Núcleo de Fejér**.

<sup>1</sup>Nome dado em homenagem ao matemático húngaro Lipót Fejér (1880-1959)

**Lema 3.2** *O Núcleo de Fejér pode ser expresso como*

$$F_N(x) = \frac{1}{N} \frac{\text{sen}^2\left(\frac{Nx}{2}\right)}{\text{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

e é um núcleo bom.

**Demonstração.**

- Sabemos pela definição 3.1 que

$$NF_N = D_0(x) + \dots + D_{N-1} = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=-n}^n e^{ikx}$$

Fazendo  $\omega = e^{ix}$ , segue

$$\begin{aligned} NF_N(x) &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=-n}^n \omega^k = \sum_{n=0}^{N-1} (\omega^{-n} + \omega^{-n+1} + \dots + \omega^{-1} + 1 + \omega + \dots + \omega^{n-1} + \omega^n) = \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \omega^{-n} (1 + \omega + \dots + \omega^{2n}) \end{aligned}$$

Note que os termos em parênteses formam a soma dos termos de uma P.G, assim

$$\begin{aligned} NF_N(x) &= \sum_{n=0}^{N-1} \omega^{-n} \left( \frac{\omega^{2n+1} - 1}{\omega - 1} \right) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\omega^{n+1} - \omega^{-n}}{\omega - 1} = \frac{1}{\omega - 1} \left[ \sum_{n=0}^{N-1} \omega^{n+1} - \sum_{n=0}^{N-1} \omega^{-n} \right] = \\ &= \frac{1}{\omega - 1} \left[ (\omega + \omega^2 + \dots + \omega^N) - \left( 1 + \frac{1}{\omega} + \dots + \frac{1}{\omega^{N-1}} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{\omega - 1} \left[ \omega (1 + \omega + \dots + \omega^{N-1}) - \left( \frac{\omega^{N-1} + \omega^{N-2} + \dots + \omega + 1}{\omega - 1} \right) \right] \end{aligned}$$

Novamente os termos entre parênteses formam a soma dos termos de um P.G, segue

$$NF_N(x) = \frac{1}{\omega - 1} \left[ \omega \frac{\omega^N - 1}{\omega - 1} - \frac{1}{\omega^{N-1}} \frac{\omega^N - 1}{\omega - 1} \right] = \frac{\omega^N - 1}{(\omega - 1)^2} \left[ \omega - \frac{1}{\omega^{N-1}} \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\omega^N - 1}{(\omega - 1)^2} \cdot \frac{\omega^N - 1}{\omega^{N-1}} = \frac{1}{\omega^{N-1}} \cdot \frac{(\omega^N - 1)^2}{(\omega - 1)^2} = \frac{\frac{(\omega^N - 1)^2}{\omega^N}}{\frac{(\omega - 1)^2}{\omega}} = \\
&= \left[ \frac{\left( \frac{\omega^N - 1}{\omega^{\frac{N}{2}}} \right)^2}{\left( \frac{\omega - 1}{\omega^{\frac{1}{2}}} \right)^2} \right] = \frac{\left( \frac{\omega^{\frac{N}{2}} - \omega^{-\frac{N}{2}}}{\omega^{2i}} \right)^2}{\left( \frac{\omega^{\frac{1}{2}} - \omega^{-\frac{1}{2}}}{2i} \right)^2}
\end{aligned}$$

Sabemos por (2.2.5) que  $\text{sen } \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$ , assim;

$$F_N(x) = \frac{1}{N} \frac{\text{sen}^2 \left( \frac{Nx}{2} \right)}{\text{sen}^2 \left( \frac{x}{2} \right)}$$

- Mostremos agora que  $F_N(x)$  é um núcleo bom, isto é, satisfaz as três propriedades da definição 2.9.

(1) Temos que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_N(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{D_0(x) + \dots + D_{N-1}(x)}{N} dx = \frac{1}{2\pi N} \sum_{n=0}^{N-1} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x) dx$$

Sabemos por (2.4.4) que  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(x) dx = 1$ , assim

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_N(x) dx = \frac{1}{2\pi N} (N2\pi) = 1$$

Logo, satisfaz a propriedade (a) da definição 2.9.

(2) Como  $F_N(x) = \frac{1}{N} \frac{\text{sen}^2 \left( \frac{Nx}{2} \right)}{\text{sen}^2 \left( \frac{x}{2} \right)} \geq 0 \forall x \in [-\pi, \pi], x \neq 0$ . Assim,  $|F_N(x)| = F_N(x)$ .

Daí,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |F_N(x)| dx = \int_{-\pi}^{\pi} F_N(x) dx = 2\pi.$$

Dessa forma, existe  $M = 2\pi + 1$  tal que

$$\int_{-\pi}^{\pi} F_N(x) dx \leq M$$

Logo, satisfaz a propriedade (b) da definição 2.9.

(3) Uma vez que, para  $\delta \leq |x| \leq \pi$ , temos  $\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \geq c_\delta > 0$ . Segue

$$|F_N(x)| = F_N(x) = \frac{1}{N} \frac{\sin^2\left(\frac{Nx}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} \leq \frac{1}{N} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} \leq \frac{1}{N} \frac{1}{c_\delta}.$$

Assim,

$$\int_{\delta \leq |x| \leq \pi} |F_N(x)| dx = \int_{\delta \leq |x| \leq \pi} \frac{1}{N c_\delta} \rightarrow 0,$$

se  $N \rightarrow \infty$

Concluimos que os **Núcleos de Fejér** formam uma família de núcleos bons.

□

### 3.1.1 Teorema de Fejér

**Teorema 3.3** *Se  $f$  é integrável em  $[-\pi, \pi]$ , então a série de Fourier de  $f$  é somável a Cesàro para  $f$  em todo ponto onde  $f$  é contínua. Além disso, se  $f$  é contínua em  $[-\pi, \pi]$ , então a série de Fourier de  $f$  é uniformemente somável à Cesàro para  $f$ .*

#### Demonstração.

Aplicando o Teorema 2.10 nos núcleos de Fejér, temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f * F_n)(x) = f(x),$$

Conclui-se que  $f$  é uniformemente somável a Cesàro.

□



**Corolário 3.4** *Uma função contínua  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  pode ser uniformemente aproximada por polinômios trigonométricos.*

**Demonstração.**

Pelo teorema temos que  $\sigma_N(f) \rightarrow f$  e  $\sigma_N(f)$  é um polinômio trigonométrico, pois é soma (média) de polinômios trigonométricos.

□

Isto significa que se  $f$  é contínua em  $[-\pi, \pi]$  com  $f(-\pi) = f(\pi)$  e  $\varepsilon > 0$ , então existe um polinômio trigonométrico  $P$  tal que

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon,$$

para todo  $-\pi \leq x \leq \pi$ .

# Teorema de Equidistribuição de Weyl

## 4.1 Introdução

Agora utilizaremos as ideias vistas nos capítulos anteriores a fim de tratar um problema envolvendo números irracionais. Mais especificamente, podemos chamar de propriedade da equidistributividade dos números irracionais. Começamos com uma discussão sobre conceitos importantes para compreender nosso principal teorema.

### 4.1.1 Conceitos importantes

Seja  $x$  um número real, denotamos por  $[x]$  como sendo o maior inteiro menor do que ou igual a  $x$  e chamamos parte inteira de  $x$ . A parte fracionária de  $x$  é definida por  $\langle x \rangle = x - [x]$ . Em particular  $\langle x \rangle \in [0, 1)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

**Exemplos:**

- (1) Seja  $x = 2,7$  assim  $[2,7] = 2$  e  $\langle 2,7 \rangle = 0,7$ .
- (2) Sendo  $y = -3,4$  temos  $[-3,4] = -4$  e  $\langle -3,4 \rangle = 0,6$ .

Podemos definir uma relação em  $\mathbb{R}$  dizendo que dois números  $x$  e  $y$  são equivalentes, ou congruentes, se  $x - y \in \mathbb{Z}$ . Escrevemos

$$x \equiv y \pmod{\mathbb{Z}} \text{ ou } x \equiv y \pmod{1}$$

Não devemos confundir essa definição com a de congruência convencional que estudamos em um primeiro curso de teoria dos números. Aqui significa que podemos

identificar dois números reais se a diferença entre eles for um número inteiro. Observe-mos ainda que qualquer  $x \in \mathbb{R}$  é congruente a um único número em  $[0, 1)$  que é mais precisamente  $\langle x \rangle$  a parte fracionária de  $x$ . Assim, reduzir um número real a módulo  $\mathbb{Z}$  significa considerarmos apenas sua parte fracionária.

Seja  $\gamma \neq 0$  um número real e consideremos a sequência  $\gamma, 2\gamma, 3\gamma, \dots$ . Podemos nos perguntar o que acontece com essa sequência se examinarmos a sequência das partes fracionárias, ou seja

$$\langle \gamma \rangle, \langle 2\gamma \rangle, \langle 3\gamma \rangle, \langle 4\gamma \rangle, \dots$$

Façamos algumas observações:

- (i) Se  $\gamma$  é racional, então apenas um número finito de elementos da sequência  $\langle n\gamma \rangle$  são distintos.

De fato, se  $\gamma = \frac{p}{q}$ , então os  $q$  primeiros termos da sequência são:

$$\left\langle \frac{p}{q} \right\rangle, \left\langle 2\frac{p}{q} \right\rangle, \dots, \left\langle (q-1)\frac{p}{q} \right\rangle, \left\langle q\frac{p}{q} \right\rangle = 0$$

A partir do termo  $q+1$  a sequência começará a se repetir, pois note que

$$\left\langle (q+1)\frac{p}{q} \right\rangle = \left\langle 1 + \frac{p}{q} \right\rangle = \left\langle \frac{p}{q} \right\rangle.$$

- (ii) Se  $\gamma$  é irracional, então os elementos de  $\langle n\gamma \rangle$  são todos distintos.

De fato, assumamos que nem todos os elementos são distintos. Portanto, temos  $\langle n_1\gamma \rangle = \langle n_2\gamma \rangle$  para algum  $n_1 \neq n_2$ , então  $n_1\gamma - n_2\gamma \in \mathbb{Z}$ , por isso  $\gamma$  é racional, o que é uma contradição, logo todos os elementos são distintos.

É possível mostrarmos ainda que se  $\gamma$  é irracional, então  $\langle n\gamma \rangle$  é denso no intervalo  $[0, 1)$ , esse resultado foi provado pelo matemático alemão Leopold Kronecker (1823 - 1891). Isto significa que para cada subintervalo não degenerado  $(a, b) \in [0, 1)$  conterá um elemento da sequência  $\langle n\gamma \rangle$ . Esse fato será obtido como um corolário do teorema de equidistribuição da sequência  $\langle n\gamma \rangle$ .

**Definição 4.1** Uma sequência de números  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  em  $[0, 1)$  é dita ser **equidistribuída** se para todo intervalo  $(a, b) \subset [0, 1)$ ,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\#\{1 \leq n \leq N : x_n \in (a, b)\}}{N} = b - a$$

onde  $\#A$  denota a cardinalidade do conjunto  $A$ . Isto significa que para  $N$  suficientemente grande, a proporção de elementos de  $x_n \in (a, b)$  com  $n \leq N$  é igual ao comprimento do intervalo  $(a, b)$ . Em outras palavras, a sequência  $x_n$  se distribui uniformemente em todo subintervalo  $(a, b) \subset [0, 1)$ .

Vejamos agora o principal teorema deste trabalho.

## 4.2 Teorema de Equidistribuição de Weyl

**Teorema 4.2 Teorema de Equidistribuição de Weyl:** Se  $\gamma$  é irracional, então a sequência  $\langle \gamma \rangle, \langle 2\gamma \rangle, \langle 3\gamma \rangle, \dots$  das partes fracionárias é equidistribuída em  $[0, 1)$ .

**Demonstração.**

De acordo com a definição 4.1 devemos mostrar que fixado  $(a, b) \subset [0, 1)$ , teremos

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\#\{1 \leq n \leq N : \langle n\gamma \rangle \in (a, b)\}}{N} = b - a.$$

Como motivação para a demonstração vejamos uma ilustração dos termos da sequência  $\langle \gamma \rangle, \langle 2\gamma \rangle, \langle 3\gamma \rangle, \dots, \langle N\gamma \rangle$  para três diferentes valores de  $N$  quando  $\gamma = \sqrt{2}$ .

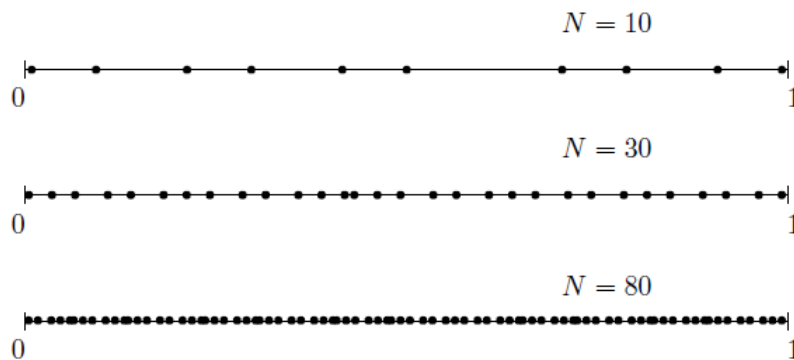


Figura 4.1: Sequência  $\langle \gamma \rangle, \langle 2\gamma \rangle, \langle 3\gamma \rangle, \dots, \langle N\gamma \rangle$  quando  $\gamma = \sqrt{2}$

Fixemos  $(a, b) \subset [0, 1)$  e seja  $\chi_{(a,b)} : [0, 1) \rightarrow \{0, 1\}$ , onde  $\chi_{(a,b)}(x)$  denota a função característica do intervalo  $(a, b)$ , isto é,

$$\chi_{(a,b)}(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \notin (a, b) \\ 1, & \text{se } x \in (a, b) \end{cases}$$

Podemos estender essa função para  $\mathbb{R}$  por periodicidade (período 1), e ainda denotaremos essa extensão por  $\chi_{(a,b)}(x)$ , temos então  $\chi_{(a,b)} : \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$  tal que

$$\chi_{(a,b)}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } \exists n \in \mathbb{Z}; a + n < x < b + n \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Isso significa que contar os elementos da sequência  $\langle n\gamma \rangle$  pertencentes a  $(a, b)$  é o mesmo que somar as imagens de  $\chi_{(a,b)}(x)$ . Ou seja,

$$\#\{1 \leq n \leq N : \langle n\gamma \rangle \in (a, b)\} = \sum_{n=1}^N \chi_{(a,b)}(n\gamma)$$

Note ainda que,

$$\int_0^1 \chi_{(a,b)}(x) dx = b - a,$$

pois é a área de um retângulo de lados  $(b - a)$  e 1.

Assim, podemos reformular o teorema, e o que devemos provar agora é:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \chi_{(a,b)}(n\gamma) = \int_0^1 \chi_{(a,b)}(x) dx \quad (4.2.1)$$

Isso retira a dificuldade de se trabalhar com partes fracionárias e transfere um problema de teoria dos números para um problema de análise.

Agora, faremos uma pausa na demonstração desse teorema, pois o lema a seguir nos fornece um importante resultado para solucionar o problema (4.2.1).

**Lema 4.3** *Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua periódica de período 1, e seja  $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . Então:*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(n\gamma) = \int_0^1 f(x) dx \quad (4.2.2)$$

### Demonstração.

A prova desse lema será dividido em 3 passos.

Passo 1: Verifiquemos primeiramente a validade de (4.2.2) quando  $f(x) = f_n(x) = e^{2\pi i n x}$ , com  $n \geq 0$ , isto é, tem-se  $(1, e^{2\pi i x}, e^{4\pi i x}, e^{6\pi i x}, \dots)$ .

- Se  $n = 0$ , então  $f_n(x) = f_0(x) = 1$ . Nesse caso,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(n\gamma) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N 1 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N}{N} = 1$$

e

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 dx = 1$$

Portanto, para  $n = 0$  vale (4.2.2).

- Se  $n \geq 1$ , então

$$\int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 e^{2\pi i n x} dx = \frac{1}{2\pi i n x} \cdot [e^{2\pi i n x}]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2\pi i n x} [e^{2\pi i} - 1] = 0$$

Por outro lado,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(n\gamma) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N e^{2\pi i n k \gamma}.$$

Como  $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , temos que  $e^{2\pi i n k \gamma}$  pois, se  $e^{2\pi i n k \gamma} = 1 = e^{2\pi i l}$ ,  $l \in \mathbb{Z}$ , ou seja,  $2\pi i n k \gamma = e^{2\pi i l}$ , o que implica  $\gamma = \frac{l}{nk} \in \mathbb{Q}$ , que é uma contradição.

Seja  $f_n(\gamma) := q$ , assim  $f_n(k\gamma) = e^{2\pi i n k \gamma} = (e^{2\pi i \gamma})^k = q^k$ , com  $q \neq 1$ .

Segue que,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N f_n(k\gamma) &= \sum_{k=1}^N q^k = q + q^2 + \dots + q^N = q \cdot \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q} \Rightarrow \\ \Rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(n\gamma) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{N} q \cdot \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q} \right) = 0 \end{aligned}$$

Passo 2: Se  $f$  e  $g$  satisfazem (4.2.2), então  $\alpha f + \beta g$  também satisfazem (4.2.2).

De fato,

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (\alpha f + \beta g)(n\gamma) &= \alpha \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(n\gamma) + \beta \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N g(n\gamma) = \\ &= \alpha \int_0^1 f(x) dx + \beta \int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 (\alpha f + \beta g)(x) dx. \end{aligned}$$

Vimos pela definição (2.7) que todo polinômio trigonométrico é combinação linear de um número finito de funções do conjunto  $(1, e^{2\pi i x}, e^{4\pi i x}, e^{6\pi i x}, \dots)$ .

Assim, pelo Passo 1, todos os elementos do conjunto acima satisfazem (4.2.2).

Pelo Passo 2, todos os polinômios trigonométricos satisfazem (4.2.2).

Passo 3: Seja  $\varepsilon > 0$ . Dada  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua periódica de período 1, existe um polinômio trigonométrico  $P(x)$  tal que  $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - P(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ . Isto se justifica pelo corolário (3.4) do capítulo anterior.

Como os polinômios trigonométricos satisfazem (4.2.2), existe  $N \gg 0$  tal que

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N P(n\gamma) - \int_0^1 P(x) dx \right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (4.2.3)$$

Assim, devemos mostrar  $\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(n\gamma) - \int_0^1 f(x) dx \right| < \varepsilon$ .

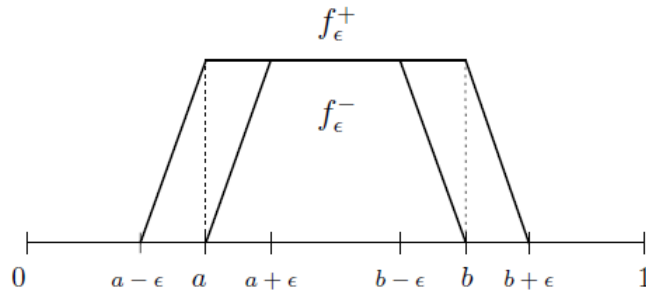
Logo, pelo passos 1, 2 e por (4.2.3) e utilizando a desigualdade triangular, conclui-se

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(n\gamma) - \int_0^1 f(x) dx \right| = \\ & \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(n\gamma) - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N P(n\gamma) + \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N P(n\gamma) - \int_0^1 P(x) dx + \int_0^1 P(x) dx - \int_0^1 f(x) dx \right| \leq \\ & \leq \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(n\gamma) - P(n\gamma) \right| + \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N P(n\gamma) - \int_0^1 P(x) dx \right| + \left| \int_0^1 P(x) - f(x) dx \right| \leq \\ & < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar.

□

Agora podemos finalizar a prova do teorema. Para isso, basta escolhermos duas funções contínuas  $f_\varepsilon^+ : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $f_\varepsilon^- : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de período 1 que aproximem  $\chi_{(a,b)}(x)$  sobre  $[0, 1)$  por baixo e por cima, e ainda  $f_\varepsilon^+$  e  $f_\varepsilon^-$  são limitadas por 1 e coincidem com  $\chi_{(a,b)}(x)$  exceto em intervalos de comprimento total  $2\varepsilon$ , como mostra a figura seguinte:

Figura 4.2: Aproximações de  $\chi_{(a,b)}(x)$ 

Em particular, temos

$$f_\varepsilon^-(x) \leq \chi_{(a,b)}(x) \leq f_\varepsilon^+(x), \forall x \in \mathbb{R} \quad (4.2.4)$$

$$\int_0^1 f_\varepsilon^-(x) dx \geq b - a - 2\varepsilon \quad (4.2.5)$$

e

$$\int_0^1 f_\varepsilon^+(x) dx \leq b - a + 2\varepsilon \quad (4.2.6)$$

De fato, observe que,  $\int_0^1 f_\varepsilon^-(x) dx$  e  $\int_0^1 f_\varepsilon^+(x) dx$  são áreas de trapézios como mostra a figura 4.2. Assim, segue

$$\int_0^1 f_\varepsilon^-(x) dx = \frac{1}{2}(b - a + b - \varepsilon - a - \varepsilon) = b - a - \varepsilon \geq b - a - 2\varepsilon$$

e

$$\int_0^1 f_\varepsilon^+(x) dx = \frac{1}{2}(b + \varepsilon - a + \varepsilon + b - a) = b - a + \varepsilon \leq b - a + 2\varepsilon$$

Agora, fazendo  $S_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \chi_{(a,b)}(n\gamma)$ , obtemos da expressão (4.2.4)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f_\varepsilon^-(n\gamma) \leq \lim_{N \rightarrow \infty} S_N \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f_\varepsilon^+(n\gamma) \quad (4.2.7)$$

Pelo lema 4.3 e por (4.2.5) e (4.2.6) resulta que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f_\varepsilon^-(n\gamma) = \int_0^1 f_\varepsilon^-(x) dx \geq b - a - 2\varepsilon$$

e



$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f_{\varepsilon}^{+}(n\gamma) = \int_0^1 f_{\varepsilon}^{+}(x) dx \leq b - a + 2\varepsilon$$

Assim, de (4.2.7) temos

$$b - a - 2\varepsilon \leq \lim_{N \rightarrow \infty} S_N \leq b - a + 2\varepsilon$$

Como isso é válido para todo  $\varepsilon > 0$ , concluímos que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \chi_{(a,b)}(n\gamma) = b - a = \int_0^1 \chi_{(a,b)}(x) dx$$

o que completa a demonstração do Teorema de Equidistribuição de Weyl.

□

## Referências Bibliográficas

- [1] Stein, Elias M., Shakarchi, Rami, *Fourier Analysis: An Introduction*, vol. 1, Princeton University Press, Princeton, 2003.
- [2] Figueiredo, Djairo Guedes de, *Análise de Fourier e equações diferenciais parciais*, IMPA, , 1977.
- [3] Lima, E. L., *Curso de Análise*, vol. 1, IMPA, Rio de Janeiro, 2006.